

АКАДЕМИЯ НАУК СССР

КОСМИЧЕСКИЕ
ИССЛЕДОВАНИЯ

Том XXIII

(ОТДЕЛЬНЫЙ ОТТИСК)

4

МОСКВА · 1985

УДК 629.197.23.332.80

В. И. Лашкин

ОБ ОБОБЩЕННЫХ ПЕРЕЛЕТАХ И НЕОПТИМАЛЬНОСТИ ЧИСТО РАДИАЛЬНЫХ ИМПУЛЬСОВ

Предлагается система переменных, удобная для точной постановки задачи оптимального многоимпульсного перелета между произвольными непрямолинейными кеплеровскими орбитами. Для таких орбит с помощью разработанного математического аппарата доказано существование двумпульсного всегда возможного — универсального — перелета с трансверсальными импульсами. Найдены расчетные формулы для этих импульсов, обобщающие соответствующие формулы двумпульсного гомановского перелета между круговыми орбитами. Кроме того, получена оценка снизу для характеристической скорости одноимпульсного перелета между орбитами, имеющими общую точку, и доказана неоптимальность любого радиального импульса.

1. Некоторые формальные обобщения понятий импульса и перелета. Рассмотрим последовательность произвольных, но не прямолинейных, компланарных кеплеровских орбит T_1, T_2, \dots, T_{n+1} и некоторую последовательность полярных углов $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n$, где $n \geq 1$. Кроме того, рассмотрим еще две последовательности: 1) последовательность векторов $\Delta \bar{V}_1(\varphi_1), \Delta \bar{V}_2(\varphi_2), \dots, \Delta \bar{V}_n(\varphi_n)$, где $\Delta \bar{V}_i(\varphi_i)$ — разности скоростей на орбитах T_i, T_{i+1} при значениях полярного угла $\varphi = \varphi_i$ ($i=1, 2, \dots, n$), и 2) последовательность чисел $\Delta r_1(\varphi_1), \Delta r_2(\varphi_2), \dots, \Delta r_n(\varphi_n)$, где $\Delta r_i(\varphi_i)$ — разности значений модулей радиус-векторов $r(\varphi)$ точек орбит T_i, T_{i+1} .

Из элементов введенных последовательностей составим более сложную

$$(\varphi_1, \Delta \bar{V}_1, \Delta r_1, T_1, T_2), (\varphi_2, \Delta \bar{V}_2, \Delta r_2, T_2, T_3), \dots \\ \dots, (\varphi_n, \Delta \bar{V}_n, \Delta r_n, T_n, T_{n+1}), \quad (1)$$

которую назовем n -импульсным обобщенным плоским перелетом.

Механический смысл этой последовательности таков: при значении полярного угла $\varphi = \varphi_1$ посредством импульса $\Delta \bar{V} = \Delta \bar{V}_1$ и мгновенного радиального скольжения на величину $\Delta r = \Delta r_1$ мысленно осуществляется переход с орбиты T_1 на орбиту T_2 ; затем при $\varphi = \varphi_2$ подобным же образом осуществляется мысленный переход с орбиты T_2 на орбиту T_3 и т. д. Орбиты, входящие в любой элемент последовательности (1), назовем смежными, а разности $\Delta \bar{V}_i(\varphi_i)$ — обобщенными импульсами. В отличие от обычных импульсов обобщенные можно прикладывать при любом значении полярного угла.

Обобщенный перелет носит абстрактный характер и практически реализован быть не может. Если же в процессе обобщенного перелета радиальные скольжения отсутствуют, то он ничем не отличается от обычного. Таким образом, рассматриваемое множество обобщенных импульсов плоских перелетов является более широким, чем множество реальных, и содержит в себе последнее как некоторое подмножество.

2. Введение новых переменных. Запишем интеграл площадей в виде

$$r(\varphi) = \sqrt{\mu p} / V_r(\varphi), \quad (2)$$

где p — фокальный параметр, V_r — трансверсальная составляющая скорости, μ — произведение массы притягивающего центра на гравитационную постоянную.

Из (2) следует, что кеплеровская орбита однозначно определяется заданием числа p и функции $V_r(\varphi)$. Аналогично тому как в [1] представлена функция $1/r(\varphi)$, представим функцию

$$V_r(\varphi) = x + y \cos(\varphi - \varphi^*) + z \sin(\varphi - \varphi^*), \quad (3)$$

где φ^* — произвольная (несущественная) постоянная, а

$$x = \sqrt{\mu/p}, \quad y = \sqrt{\mu/pe} \cos(\omega - \varphi^*), \quad z = \sqrt{\mu/pe} \sin(\omega - \varphi^*). \quad (4)$$

Здесь e , ω — эксцентриситет и аргумент перицентра кеплеровской орбиты.

Так как между радиальной V_r и трансверсальной V_t составляющими орбитальной скорости имеется зависимость $V_t = -dV_r/d\varphi$, то формула (3) дает

$$V_t(\varphi) = y \sin(\varphi - \varphi^*) - z \cos(\varphi - \varphi^*). \quad (5)$$

Если теперь для пары смежных орбит i -го элемента последовательности (1) положить $\varphi^* = \varphi_i$ ($i = 1, 2, \dots, n$), то составляющие их обобщенных импульсов в соответствии с (3) и (5) можно записать в виде

$$\Delta V_{r_i}(\varphi) = \Delta x_i + \Delta y_i \cos(\varphi - \varphi_i) + \Delta z_i \sin(\varphi - \varphi_i), \quad (6)$$

$$\Delta V_{t_i}(\varphi) = \Delta y_i \sin(\varphi - \varphi_i) - \Delta z_i \cos(\varphi - \varphi_i), \quad (7)$$

где величины Δx_i , Δy_i , Δz_i определяются равенствами

$$\begin{aligned} \Delta x_i &= \sqrt{\mu/p_{i+1}} - \sqrt{\mu/p_i}, \\ \Delta y_i &= \sqrt{\mu/p_{i+1}} e_{i+1} \cos(\omega_{i+1} - \varphi_i) - \sqrt{\mu/p_i} e_i \cos(\omega_i - \varphi_i), \\ \Delta z_i &= \sqrt{\mu/p_{i+1}} e_{i+1} \sin(\omega_{i+1} - \varphi_i) - \sqrt{\mu/p_i} e_i \sin(\omega_i - \varphi_i). \end{aligned} \quad (8)$$

Пусть теперь последовательность (1) задана. В этом случае разности Δx_i , Δy_i , Δz_i определяются непосредственно по формулам (8). Если же заданы параметры орбиты T_i , последовательность $\{\varphi_i\}$ и величины Δx_i , Δy_i , Δz_i , то этим последовательно, путем обращения формул (8), однозначно определяются параметры любой из орбит T_{i+1} ($i = 1, 2, \dots, n$).

Введем в рассмотрение вектор Лапласа \vec{f} . Его модуль $f = \mu e$. Далее определим приведенный вектор Лапласа

$$\vec{q} = x e \vec{f}_0, \quad (9)$$

где \vec{f}_0 — орт вектора Лапласа.

Нетрудно видеть, что величина x из (4) и вектор \vec{q} полностью определяют кеплеровскую орбиту.

Из (8), (9) следует, что Δy_i , Δz_i являются проекциями разности

$$\Delta \vec{q}_i = \vec{q}_{i+1} - \vec{q}_i \quad (10)$$

соответственно на радиус и трансверсаль при $\varphi = \varphi_i$. Назовем $\Delta \vec{q}_i$ опорным вектором пары смежных орбит T_i , T_{i+1} , взятых в указанной последовательности. Если орбиты T_i , T_{i+1} поменять местами, т. е. взять в последовательности T_{i+1} , T_i , то в соответствии с (10) направление опорного вектора изменится на противоположное.

Из (8), (10) имеем

$$\Delta q_i = \left[\frac{\mu}{p_{i+1}} e_{i+1}^2 - \frac{2\mu}{\sqrt{p_{i+1} p_i}} e_{i+1} e_i \cos(\omega_{i+1} - \omega_i) + \frac{\mu}{p_i} e_i^2 \right]^{1/2}. \quad (11)$$

Отсюда видно, что опорный вектор обращается в нуль, если

$$\omega_{i+1} = \omega_i, \quad e_{i+1}^2 / p_{i+1} = e_i^2 / p_i. \quad (12)$$

В частности, эти условия выполняются для пары круговых орбит.

Если же условия (12) не выполняются, то $\Delta \bar{q}_i \neq 0$, и

$$\Delta y_i = \Delta q_i \cos(\gamma_i - \varphi_i), \quad \Delta z_i = \Delta q_i \sin(\gamma_i - \varphi_i), \quad (13)$$

где γ_i — полярный угол вектора $\Delta \bar{q}_i$.

Покажем, что для любой пары смежных орбит T_i, T_{i+1} , имеющих общую точку, что всегда имеет место для реальных импульсных перелетов, опорный вектор отличен от нуля.

Действительно, предположим, что при указанном предположении $\Delta \bar{q}_i = 0$. Тогда выполняются условия (12), а также равенства

$$\Delta V_{\tau_i}(\varphi) = \Delta x_i = \text{const}, \quad \Delta V_{\tau_{i+1}}(\varphi) = 0, \quad (14)$$

справедливость которых проверяется с помощью формул (6), (7), если в них в соответствии с условием $\Delta \bar{q}_i = 0$ и равенствами (13) положить $\Delta y_i = \Delta z_i = 0$.

По условию орбиты T_i, T_{i+1} имеют общую точку при $\varphi = \varphi_i$, т. е. выполняется условие $\Delta r_i(\varphi_i) = 0$. Это равенство в соответствии с (2) и первым равенством в (4) можно записать в виде

$$x_{i+1} V_{\tau_{i+1}}(\varphi_i) - x_i V_{\tau_i}(\varphi_i) = 0, \quad (15)$$

и, кроме того, имеем

$$x_{i+1} = x_i + \Delta x_i, \quad V_{\tau_{i+1}}(\varphi_i) = V_{\tau_i}(\varphi_i) + \Delta V_{\tau_i}(\varphi_i).$$

Условие (15) с учетом первого равенства в (14) принимает вид

$$\Delta x_i [x_{i+1} + V_{\tau_i}(\varphi_i)] = 0.$$

Так как второй множитель здесь всегда положителен, то это равенство возможно только при $\Delta x_i = 0$, т. е. в соответствии с (8) только для орбит с равными фокальными параметрами. С учетом (12) заключаем, что орбиты T_i, T_{i+1} полностью совпадают, что невозможно. В силу этого для любой пары орбит T_i, T_{i+1} с общей точкой вектор $\Delta \bar{q}_i$ отличен от нуля и имеет направление, определяемое полярным углом γ_i .

Для выяснения кинематического смысла этого угла запишем в соответствии с (6), (7), (13) равенства

$$\Delta V_{\tau_i}(\varphi) = \Delta x_i + \Delta q_i \cos(\varphi - \gamma_i), \quad (16)$$

$$\Delta V_{\tau_{i+1}}(\varphi) = \Delta q_i \sin(\varphi - \gamma_i), \quad (17)$$

$$\Delta V_i(\varphi) = [\Delta V_{\tau_i}^2(\varphi) + \Delta V_{\tau_{i+1}}^2(\varphi)]^{1/2} = [\Delta x_i^2 + 2\Delta x_i \Delta q_i \cos(\varphi - \gamma_i) + \Delta q_i^2]^{1/2}, \quad (18)$$

где $\Delta V_i(\varphi)$ — величина обобщенного импульса.

Посредством дифференцирования равенства (18) можно убедиться, что значения полярного угла $\varphi = \gamma_i$ и $\varphi = \gamma_i + \pi$ для функции $\Delta V_i(\varphi)$ являются стационарными, причем для этих значений

$$\frac{d^2 \Delta V_i}{d\varphi^2} = \mp \frac{\Delta x_i \Delta q_i}{\Delta V_i}$$

где минус соответствует углу $\varphi = \gamma_i$, а плюс — углу $\varphi = \gamma_i + \pi$.

Кроме того, из (17) следует, что разность радиальных скоростей смежных орбит при этих значениях полярного угла обращается в нуль.

3. Универсальный двухимпульсный перелет. Указанное свойство полярных углов γ , $\gamma+\pi$ можно использовать для построения универсального, т. е. всегда возможного перелета между произвольными орбитами T_1 , T_3 посредством двух трансверсальных импульсов. При $\Delta\bar{Q} \neq 0$ ($\Delta\bar{Q}$ — опорный вектор орбит) для реализации этого перелета достаточно прикладывать трансверсальные импульсы через полвитка на линии его действия. Значение первого импульса определяется из условия попадания в противоположную точку на конечной орбите, а второй импульс равен разности трансверсальных скоростей на конечной и промежуточной орбитах. Равенство радиальных скоростей после приложения второго трансверсального импульса обеспечивается автоматически в силу неизменности линий действия опорных векторов смежных пар орбит при данном маневре.

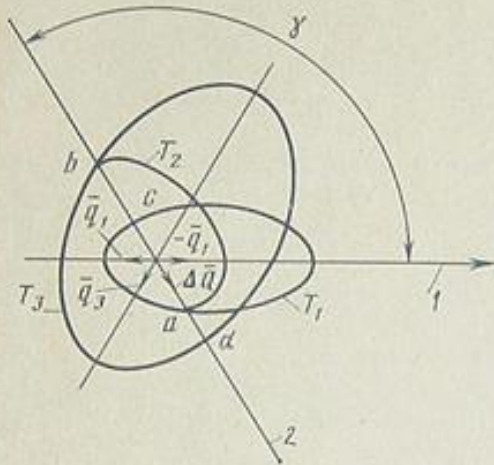


Рис. 1
1 — полярная ось, 2 — линия действия опорного вектора

Для любой пары орбит, для которых $\Delta\bar{Q} \neq 0$, возможны два таких перелета: 1) из точки a в точку b и 2) из точки c в точку d (рис. 1).

При $\Delta\bar{Q} = 0$ место приложения первого трансверсального импульса выбирается произвольно, а второй импульс опять же прикладывается через полвитка.

Для отыскания значений трансверсальных импульсов, реализующих универсальный перелет, рассмотрим

уравнение кеплеровской орбиты в виде

$$u(\varphi) = \frac{1}{r(\varphi)} = a + A \cos(\varphi - \varphi^*) + B \sin(\varphi - \varphi^*), \quad (19)$$

как это сделано в [1]. В этом равенстве

$$a = \frac{1}{p}, \quad A = \frac{e}{p} \cos(\omega - \varphi^*), \quad B = \frac{e}{p} \sin(\omega - \varphi^*).$$

Для пары смежных орбит T_i , T_{i+1} в соответствии с (19) можно написать:

$$\Delta u_i(\varphi) = \Delta a_i + \Delta A_i \cos(\varphi - \varphi_i^*) + \Delta B_i \sin(\varphi - \varphi_i^*), \quad (20)$$

где

$$\Delta a_i = \frac{1}{p_{i+1}} - \frac{1}{p_i}, \quad \Delta A_i = \frac{e_{i+1}}{p_{i+1}} \cos(\omega_{i+1} - \varphi_i^*) - \frac{e_i}{p_i} \cos(\omega_i - \varphi_i^*),$$

$$\Delta B_i = \frac{e_{i+1}}{p_{i+1}} \sin(\omega_{i+1} - \varphi_i^*) - \frac{e_i}{p_i} \sin(\omega_i - \varphi_i^*).$$

Если орбиты T_i , T_{i+1} имеют общую точку при $\varphi = \varphi_i$, то, полагая $\varphi_i^* = \varphi_i$, $\Delta u_i(\varphi_i) = 0$, получим $\Delta A_i = -\Delta a_i$. Тогда (20) дает

$$\Delta u_i(\varphi) = \Delta a_i [1 - \cos(\varphi - \varphi_i)] + \Delta B_i \sin(\varphi - \varphi_i). \quad (21)$$

Универсальный двухимпульсный перелет состоит из дуг трех орбит T_1 , T_2 , T_3 , причем T_1 и T_3 заданы. В соответствии с (2) имеем

$$\Delta V_{v_1} = (\sqrt{\mu p_2} - \sqrt{\mu p_1}) u_1(\varphi_1), \quad \Delta V_{v_2} = (\sqrt{\mu p_3} - \sqrt{\mu p_2}) u_2(\varphi_2), \quad (22)$$

где φ_1 и $\varphi_2 = \varphi_1 + \pi$ — аргументы точек приложения импульсов, p_2 — фокальный параметр промежуточной орбиты.

Полагая в (21) $\varphi = \varphi_1 + \pi$, получим для $i=1$

$$\Delta u_1(\varphi_1 + \pi) = 2\Delta a_1 = 2/p_2 - 2/p_1. \quad (23)$$

Так как при попадании в конечную точку выполняется условие

$$\Delta u_1(\varphi_1 + \pi) = u_2(\varphi_1 + \pi) - u_1(\varphi_1 + \pi), \quad (24)$$

а из (19) имеем

$$u_1(\varphi_1 + \pi) = 2/p_1 - u_1(\varphi_1), \quad (25)$$

то из (23) — (25) следует

$$p_2 = \frac{2}{u_1(\varphi_1) + u_2(\varphi_2)}$$

и формулы (22) принимают вид

$$\begin{aligned} \Delta V_{\pi} &= \left(\sqrt{\frac{2\mu}{u_1(\varphi_1) + u_2(\varphi_2)}} - \sqrt{\mu p_1} \right) u_1(\varphi_1), \\ \Delta V_{\pi} &= \left(\sqrt{\mu p_2} - \sqrt{\frac{2\mu}{u_1(\varphi_1) + u_2(\varphi_2)}} \right) u_2(\varphi_2). \end{aligned} \quad (26)$$

Рассмотрим двухимпульсный универсальный перелет между двумя круговыми орбитами радиусов R_1 и R_2 . В этом случае $u_1(\varphi_1) = 1/R_1$, $p_1 = R_1$, $u_2(\varphi_2) = R_2$, $p_2 = R_2$, и формулы (26) дают то же, что и [2]:

$$\Delta V_{\pi} = \sqrt{\frac{\mu}{R_1}} \left(\sqrt{\frac{2R_2}{R_1 + R_2}} - 1 \right), \quad \Delta V_{\pi} = \sqrt{\frac{\mu}{R_2}} \left(1 - \sqrt{\frac{2R_1}{R_1 + R_2}} \right). \quad (27)$$

Таким образом, формулы (26) обобщают формулы Гомана (27) на случай любой пары плоских непрямолинейных орбит. Вопрос об оптимальности перелета (26) в общем случае остается открытым. Численные расчеты показывают, что, вообще говоря, он оптимальным не является. Для круговых орбит это показано в [3]. Достоинствами этого перелета является его универсальность, неизменность ориентации и простота расчетов формул.

4. Постановка задачи оптимизации многоимпульсного плоского перелета в новых переменных. Пусть требуется минимизировать характеристическую скорость перелета. В соответствии с (18)

$$\Delta V_{\Sigma} = \sum_{i=1}^n \sqrt{\Delta x_i^2 + 2\Delta x_i \Delta q_i \cos(\varphi_i - \gamma_i) + \Delta q_i^2}. \quad (28)$$

Граничные условия запишем в виде

$$\sum_{i=1}^n \Delta x_i = \Delta X, \quad \sum_{i=1}^n \Delta \bar{q}_i = \Delta \bar{Q}, \quad (29)$$

где $\Delta X = x_{n+1} - x_1$, $\Delta \bar{Q} = \bar{q}_{n+1} - \bar{q}_1$.

Проектируя второе соотношение (29) на полярную ось и перпендикуляр к ней, получим

$$\sum_{i=1}^n \Delta q_i \cos \gamma_i = \Delta Q \cos \gamma, \quad \sum_{i=1}^n \Delta q_i \sin \gamma_i = \Delta Q \sin \gamma, \quad (30)$$

где ΔQ , γ — модуль и аргумент опорного вектора начальной и конечной орбит.

К граничным условиям (29), (30) нужно добавить условия непрерывности (15) радиус-векторов в точках приложения импульсов, которые с учетом равенств

$$x_i = x_{i+1} - \Delta x_i, \quad V_{\tau_i}(\varphi_i) = V_{\tau_{i+1}}(\varphi_i) - \Delta V_{\tau_i}$$

можно записать в виде

$$\Delta V_{\tau_i} = - \frac{V_{\tau_i}(\varphi_i)}{x_{i+1}} \Delta x_i \quad (31)$$

Здесь и в дальнейшем аргумент i -го импульса или его составляющей опущен.

В формуле (31) можно далее выразить величины ΔV_{τ_i} , $V_{\tau_i}(\varphi_i)$, x_{i+1} через переменные φ_i , Δx_i , Δq_i , γ_i и параметры начальной орбиты T_i , используя формулы

$$V_{\tau_i}(\varphi_i) = V_{\tau_{i+1}}(\varphi_i) - \Delta V_{\tau_i}, \quad V_{\tau_{i+1}}(\varphi_i) = V_{\tau_i}(\varphi_i) + \sum_{k=1}^i \Delta V_{\tau_k},$$

$$x_{i+1} = x_i + \sum_{k=1}^i \Delta x_k,$$

$$\Delta V_{\tau_k} = \Delta x_k + \Delta q_k \cos(\varphi_i - \gamma_k) \quad (i=1, 2, \dots, n), \quad (k=1, 2, \dots, i),$$

причем трансверсальные импульсы, стоящие под знаком суммы, понимаются в обобщенном смысле, т. е. как разности трансверсальных скоростей k -й пары смежных орбит при значении аргумента $\varphi = \varphi_i$, соответствующего i -му реальному импульсу.

В результате этих преобразований условие непрерывности радиус-вектора в точке приложения i -го импульса принимает вид:

$$\left(x_i + \sum_{k=1}^i \Delta x_k \right) [\Delta x_i + \Delta q_i \cos(\varphi_i - \gamma_i)] + \left\{ V_{\tau_i}(\varphi_i) + \right.$$

$$\left. + \sum_{k=1}^i [\Delta x_k + \Delta q_k \cos(\varphi_i - \gamma_k) - \Delta x_i - \Delta q_i \cos(\varphi_i - \gamma_i)] \right\} \Delta x_i = 0. \quad (32)$$

Задача оптимального многоимпульсного перелета в новых переменных формулируется так: найти минимум функции (28) от $4n$ переменных φ , Δx_i , Δq_i , γ_i при наличии $n+3$ связей (29), (30), (32). Это — задача на условный экстремум. Она может быть решена методом неопределенных множителей Лагранжа.

5. Неоптимальность чисто радиального импульса. Рассмотрим частный случай одноимпульсного перелета между орбитами, имеющими хотя бы одну общую точку. Характеристическую скорость этого перелета — численное значение импульса, прикладываемого в общей точке орбит, определим по формуле (28), полагая $n=1$:

$$\Delta V_{\tau^1} = \sqrt{\Delta X^2 + 2\Delta X \Delta Q \cos(\varphi_i - \gamma) + \Delta Q^2}, \quad (33)$$

где φ_i — аргумент общей точки заданных орбит.

Из (16), (31) следует

$$\Delta Q \cos(\varphi_i - \gamma) = - \left[1 + \frac{V_{\tau_i}(\varphi_i)}{x_2} \right] \Delta X, \quad \text{sign} \cos(\varphi_i - \gamma) = - \text{sign} \Delta X, \quad \Delta Q > |\Delta X|. \quad (34)$$

С учетом второго условия в (34) формула (33) принимает вид

$$\Delta V_{z'} = \sqrt{\Delta X^2 - 2|\Delta X|\Delta Q \cos(\varphi_1 - \gamma) + \Delta Q^2}. \quad (35)$$

Отсюда следует, что величину $\Delta V_{z'}$ для одноимпульсного перелета можно интерпретировать как длину стороны треугольника со сторонами $\Delta V_{z'}$, $|\Delta X|$, ΔQ , лежащей против острого угла.

Вспоминая известное свойство треугольника, с учетом третьего условия в (34) получаем оценку

$$\Delta V_{z'} \geq \Delta Q - |\Delta X|. \quad (36)$$

Знак равенства здесь имеет место только при $\varphi_1 = \gamma$ и $\varphi_1 = \gamma + \pi$, т. е. когда заданные орбиты имеют общую точку на линии действия их опорного

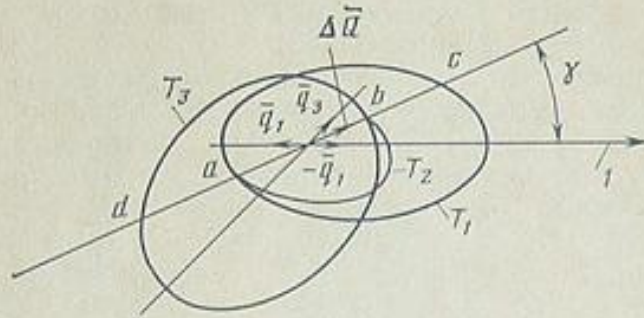


Рис. 2

вектора, или, что то же, равные радиальные скорости в общей точке. Импульс, реализующий перелет, является в этом случае чисто трансверсальным.

Относительно линии действия опорного вектора общие точки заданных орбит T_1 , T_2 (их может быть две или одна) могут располагаться двумя способами: а) по одну сторону (рис. 1), б) — по разные стороны (рис. 2).

На рис. 1 и 2 для простоты изображены случаи, когда обе орбиты эллиптические, что не уменьшает общности следующих ниже рассуждений.

Случай, когда орбиты T_1 , T_2 имеют одну точку касания, отнесем к а), если она не лежит на линии действия опорного вектора; если же орбиты имеют общую точку на линии действия опорного вектора, то этот случай отнесем к б).

Рассмотрим ранее описанный универсальный двухимпульсный перелет посредством трансверсальных импульсов, точки приложения которых лежат на линии действия опорного вектора. Вспоминая кинематический смысл этой линии, заключаем, что для случая б) перелет с орбиты T_1 на орбиту T_2 всегда возможен посредством двух трансверсальных импульсов разного знака, прикладываемых либо в точках a , b (тормозной — разгоняющий), либо в точках c , d (разгоняющий — тормозной). Из (31) следует, что величины Δx_1 , Δx_2 в этом случае также имеют разные знаки. Так как радиальные составляющие импульсов равны нулю, то с учетом (16) и неравенство $\Delta q_1 > |\Delta x_1|$, $\Delta q_2 > |\Delta x_2|$, аналогичных третьему условию в (34), можно написать

$$\Delta V_{z'} = \Delta V_1 + \Delta V_2 = |\Delta V_{\tau_1}| + |\Delta V_{\tau_2}| = \Delta q_1 - |\Delta x_1| + \Delta q_2 - |\Delta x_2|, \quad (37)$$

причем ввиду равноправного положения величины Δx_1 , Δx_2 всегда можно считать, что $|\Delta x_2| \leq |\Delta x_1|$.

Первое равенство в (34) в общем случае записывается в виде

$$\Delta q_1 \cos(\varphi_1 - \gamma_1) = - \left[1 + \frac{V_{\tau_1}(\varphi_1)}{x_{i+1}} \right] \Delta x_1,$$

поэтому с учетом условий $\Delta q_1 > 0$, $\Delta q_2 > 0$, $\varphi_2 = \varphi_1 + \pi$, $\text{sign } \Delta x_1 = -\text{sign } \Delta x_2$ заключаем, что в рассматриваемом случае $\gamma_1 = \gamma_2 = \gamma$. Тогда граничные условия (30) дают

$$|\Delta x_1| - |\Delta x_2| = |\Delta X|, \quad \Delta q_1 + \Delta q_2 = \Delta Q,$$

в силу чего равенство (37) принимает вид

$$\Delta V_z^2 = \Delta Q - |\Delta X| - 2|\Delta x_2|. \quad (38)$$

Сравнивая (36) и (38), заключаем, что для случая б) двухимпульсный перелет посредством трансверсальных импульсов в общем случае экономичнее одноимпульсного. Исключение имеем, когда для двухимпульсного перелета $\Delta x_2 = 0$, а одноимпульсный не содержит радиальной составляющей импульса. В этом случае $\Delta V_z^1 = \Delta V_z^2$, и оба перелета не отличаются, т. е. реализуются одним трансверсальным импульсом в общей точке орбит на линии равных радиальных скоростей.

Полученный результат можно использовать для доказательства неоптимальности чисто радиального импульса. Действительно, для пары орбит, полученной одна из другой посредством радиального импульса, имеет место равенство $p_1 = p_2$, в силу чего из (21) следует, что орбиты имеют две точки пересечения на угловом расстоянии π . Кроме того, выполняются условия: $\Delta V_{\varphi_1} = 0$, $\Delta x_1 = \Delta X = 0$, $\Delta q_1 = \Delta Q$, $\gamma_1 = \gamma$, в силу которых из (16) следует $\cos(\varphi_1 - \gamma) = 0$, $\varphi_1 = \gamma \pm \pi/2$, т. е. точки пересечения рассматриваемых орбит лежат по разные стороны от опорного вектора. Следовательно, имеем случай б). В силу этого одноимпульсный перелет посредством чисто радиального импульса является всегда неоптимальным. Для этого перелета в соответствии с (35) $\Delta V_z^1 = \Delta Q$, в то время как в соответствии с (38) $\Delta V_z^2 = \Delta Q - 2|\Delta x_2|$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Кузмак Г. Е. Линеаризованная теория оптимальных многоимпульсных плоских перелетов. — Космич. исслед., 1965, т. 3, № 1, с. 3.
2. Hoptmann W. Die Erreichbarkeit der Himmelskörper Oldenbourg. Munich, 1925.
3. Hoelker R., Silber R. The be elliptical transfer beetwern circular orbits. — Army Ballistic Missile Agency. Redstone Arsenal, 1959.

Поступила в редакцию
2.III.1980;
после переработки
24.IX.1984

Москва Г-242, Б. Грузинская, 10

Тел. 252-86-86

254-24-90

№ _____

10 октября 1984 г.

На № _____

В работе В.И.Лашкина "Об обобщенных перелетах и неоптимальности чисто радиальных импульсов" содержится несколько, по-видимому, новых результатов в теории компланарных переходов в центральном поле.

1. Доказано, что между двумя непрямолинейными кеплеровскими орбитами всегда можно осуществить переход посредством трансверсальных импульсов. Описана простая геометрическая картина такого перехода. Для значений импульсов получены формулы, обобщающие известные формулы гомановского перелета между круговыми орбитами.
2. Доказано, что, если орбиты пересекаются (т.е. возможен одноимпульсный переход), а двухимпульсный трансверсальный переход реализуется импульсами разных знаков, то этот переход ~~более экономичен~~ более экономичен.
3. Если пересекающиеся орбиты таковы, что одноимпульсный переход реализуется чисто радиальным импульсом, то двухимпульсный переход экономичнее одноимпульсного безусловно.
4. Во всех рассмотренных случаях предложены практически полезные оценки энергетических затрат, позволяющие сравнивать их между собой простым способом.

К достоинствам работы следует отнести также выбор удобных переменных.

Замечания.

1. Изложение материала имеет недостатки редакционного характера. Однако они не мешают усвоению содержания и могут быть оставлены без исправления.
2. На стр.7 в выражении для производной коэффициент, равный 2, лишний. Так как важен знак производной, то ошибка не существенна. Других ошибок не обнаружено.

Вывод.

Статья В.И.Лашкина может быть рекомендована к опубликованию в журнале "Космические исследования".

21 сентября 1984 г.

Копия отзыва верна.

Зав. редакцией *С.И.К.*